Prednáška 2

Na základe vety 1.4.23 sa môžeme pozerať na derivácie vektorových zobrazení po zložkách a teda aj na ich derivácie vyšších rádov, ktoré už poznáme z predchádzajúceho kurzu. V niektorých úvahách v budúcnosti budeme potrebovať, aby funkcie, s ktorými pracujeme, mali vlastnosť, ktorá je "trochu" lepšia ako spojitosť.

Definícia 2.0.1.

Nech (X, d_X) a (Y, d_Y) sú metrické priestory, zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva rovnomerne spojité na $M \subseteq X$, akk pre každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky $x_1, x_2 \in M$ platí

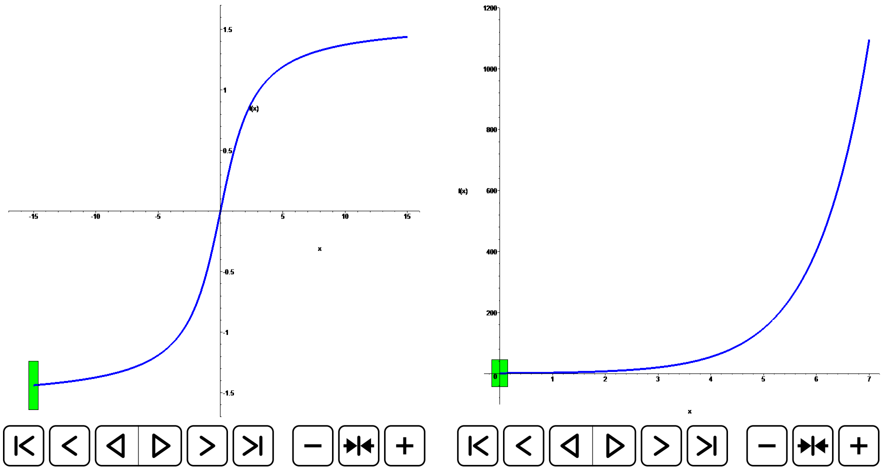
$$d_X(x_1, x_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon.$$

Poznámka 2.0.2.

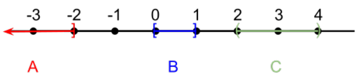
Rozdiel medzi spojitosťou a rovnomernou spojitosťou (vyplývajúci zo zmeny poradia kvantifikátorov) možno popísať nasledovne: V prvom prípade pri pevne zvolenom $\epsilon > 0$ nájdená $\delta > 0$ môže závisieť na čísle x, teda s meniacim sa x sa toto číslo môže meniť. Avšak v druhom prípade vieme už nájsť $\delta > 0$ nezávisiac na voľbe čísla x, teda také, ktoré vyhovuje všetkým prvkom danej množiny.

Poznámka 2.0.3.

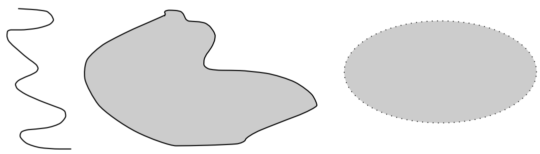
Predovšetkým si treba uvedomiť, že z práve definovanej vlastnosti skutočne vyplýva spojitosť. Obrátená implikácia vo všeobecnosti neplatí, t.j. existuje spojitá funkcia (na nejakej množine), ktorá nie je rovnomerne spojitá.



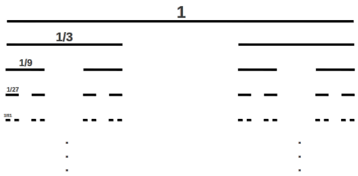
Obr. 2.1: Rovnomerná (ne)spojitosť', funkcie $\arctan x$ a e^x na množine $\mathbb{R}$.



(a) Kompaktnosť v $\mathbb{R}$.



(b) Kompaktnosť v $\mathbb{R}^2$.



(c) Cantorova množina.

Obr. 2.2: Kompaktnosť množín.

Problém 2.0.4.

Ukážte, že funkcia

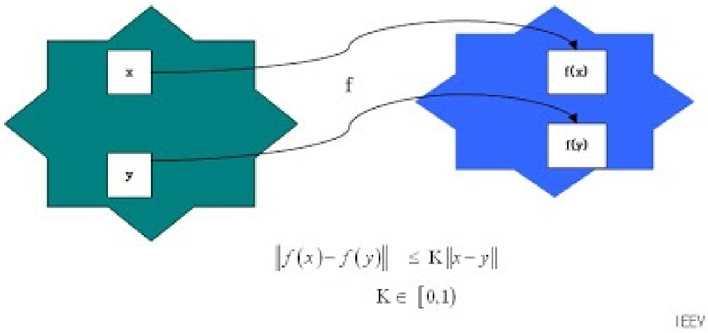
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

nie je rovnomerne spojitá na žiadnom intervale $(0, a]$, $0 < a < \infty$.

Veta 2.0.5.

Spojitá funkcia definovaná na kompakte je rovnomerne spojitá.

Ešte silnejší v zmysle spojitosti je nasledujúci pojem.



Obr. 2.3: Kontrakcia.

Definícia 2.0.6.

Nech (X, d_X) a (Y, d_Y) sú metrické priestory, zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva Lipschitzovsky spojité (na X), akk existuje konštanta $K \geq 0$ tak, že pre všetky $x_1,\ x_2 \in X$ platí

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K\, d_X(x_1, x_2).$$

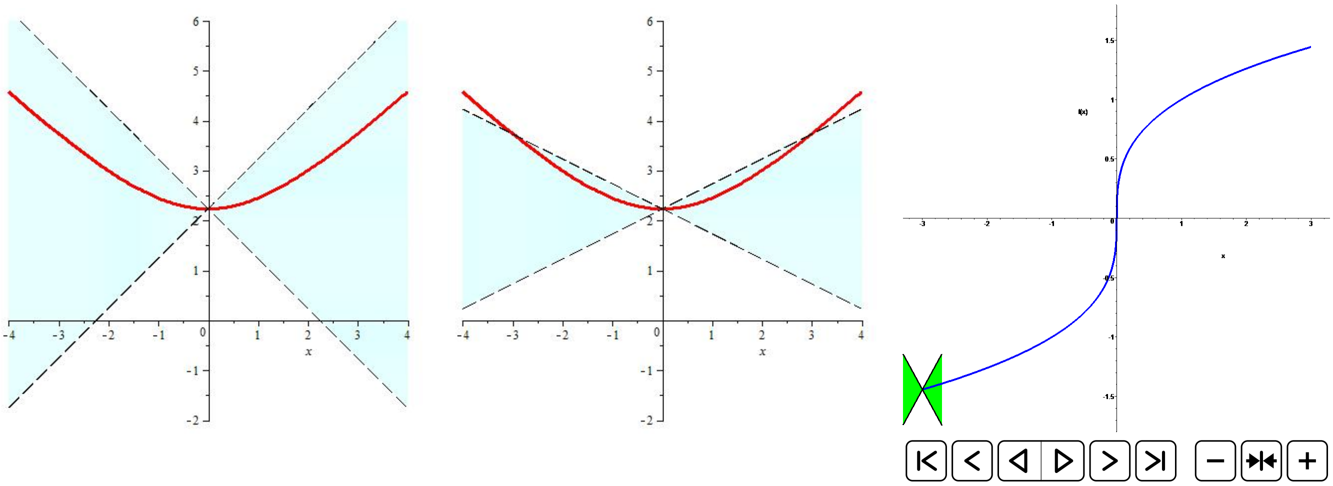
Ak najmenšie možné $K > 1$ $(= 1)$ zobrazenie sa nazýva (ne)expanzívne, a ak $0 \leq K < 1$ zobrazenie sa nazýva kontrakcia.

Príklad 2.0.7.

- funkcie $\sqrt{x^2+5},\ \sin x$ definované na $\mathbb{R}$ sú Lipschitzovsky spojité s $K = 1$
- funkcia x^2 definovaná na $\mathbb{R}$ nie je Lipschitzovsky spojitá
- funkcia $\sqrt{x}$ definovaná na $[0, 1]$ nie je Lipschitzovsky spojitá

Problém 2.0.8.

- Je každá spojitá funkcia Lipschitzovsky spojitá a naopak?
- Nájdite diferencovateľnú funkciu, ktorá nie je Lipschitzovsky spojitá.
- Ukážte, že $f(x) = |x|$ je Lipschitzovsky spojitá na $\mathbb{R}$.



Obr. 2.4: Lipschitzovská (ne)spojitosť, funkcia $\sqrt{x^2+5}$ a priamky so sklonom $|K| = 1$, resp. $|K| = 1/2$; funkcia $x^{\frac{1}{3}}$.

Veta 2.0.9.

Nech (X, d_X) a (Y, d_Y) sú metrické priestory a zobrazenie $f : X \to Y$ je Lipschitzovsky spojité. Potom je aj rovnomerne spojité.

Problém 2.0.10.

- Uveďte príklad funkcie, ktorá je spojitá na $[0, 1]$ rovnomerne ale nie Lipschitzovsky.
- Uveďte príklad funkcie, ktorá je spojitá na $\mathbb{R}$ rovnomerne ale nie Lipschitzovsky.

Veta 2.0.11 (Zovšeobecnená Lagrangeova veta o strednej hodnote)**.**

Nech $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ má totálny diferenciál na otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^m$. Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ sú také body, že $\overline{\mathbf{ab}} \subset G$. Potom existuje bod $\xi \in \overline{\mathbf{ab}}$, pre ktorý

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\xi), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle = \nabla_{\mathbf{b}-\mathbf{a}} f(\xi).$$

Veta 2.0.12 (Odhad prírastku zobrazenia).

Nech $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ má totálny diferenciál na otvorenej konvexnej množine $C \subset \mathbb{R}^m$ a nech $\sup_{\mathbf{x}\in C} \|\nabla f(\mathbf{x})\| =: K < \infty$, potom f je Lipschitzovsky spojitá na C (s najmenšou možnou konštantou K).

Ako je to s vetou o strednej hodnote v prípade vektorovej funkcie ?

Príklad 2.0.13.

Uvažujme zobrazenie z problému 1.4.9. Zrejme $\mathbf{f}'(t) = (-\sin(t), \cos(t))^T$ a $\|\mathbf{f}'(t)\| = 1$ pre každé t. Pre body $a = 0,\ b = 2\pi$ máme $\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a) = (0, 0)$. Pre každé $\xi \in \mathbb{R}$ však platí $\|\mathbf{f}'(\xi)(b - a)\| = 2\pi$, takže $\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a) = \mathbf{f}'(\xi)(b - a)$ neplatí pre žiadne $\xi \in \mathbb{R}$.

Tento príklad má názornú kinematickú interpretáciu. Vektorová funkcia $\mathbf{f}$ popisuje rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici (s jednotkovou rýchlosťou). Keby platila veta o strednej hodnote, musela by sa priemerná rýchlosť $\frac{\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)}{b-a}$ rovnať okamžitej rýchlosti $\mathbf{f}'(\xi)$ v nejakom bode ξ. To však nie je možné, lebo priemerná rýchlosť je nulový vektor a okamžitá rýchlosť je všade jednotková. Veta o odhade prírastku zobrazenia sa však dá zovšeobecniť.

Veta 2.0.14 (Odhad prírastku vektorového zobrazenia).

Nech $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ má totálny diferenciál na otvorenej konvexnej množine $C \subset \mathbb{R}^m$, $K \in \mathbb{R}$ a nech $\sup_{\mathbf{x}\in C} \|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \leq K$, potom $\mathbf{f}$ je Lipschitzovsky spojitá (s konštantou K).

Nasledujúca definícia je nám už dobre známa (fyzikálne možno túto vlastnosť interpretovať tak, že bod, ktorého pohyb funkcia popisuje, nezostáva stáť ani sa nevracia do polohy, v ktorej už bol).

Definícia 2.0.15.

Nech X, Y sú množiny, zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame prosté (injektívne), ak platí implikácia:

$$\forall (x_1, x_2 \in X) : (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Už si vieme predstaviť injektívne vektorové zobrazenie. Kvôli existencii jednoznačnosti inverzného zobrazenia však potrebujeme trochu iný pojem, definíciu regulárnosti zobrazenia.

Definícia 2.0.16.

Zobrazenie $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sa nazýva regulárne (na U), akk jeho derivácia je injektívne zobrazenie pre všetky $\mathbf{x} \in U$, t.j. Ostrogradského-Jacobiho matica má plnú hodnosť (m).

Všimnite si, že v predchádzajúcej definícii nehovoríme o tom, že gradienty jednotlivých zložiek zobrazenia sú lineárne nezávislé na U, ale že sú také parciálne derivácie daného zobrazenia (vektory).

Príklad 2.0.17.

Valec (cylinder)

$$\mathbf{f}(u,v) = \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ u \in \mathbb{R},\ v \in (-2,2)$$

je regulárne zobrazenie. Je toto zobrazenie prosté?

Uvedieme teraz vetu o lokálnej invertovateľnosti zobrazenia, ktorá je v skutočnosti špeciálnym prípadom vety o implicitnej funkcii, ktorú uvedieme neskôr.

Veta 2.0.18 (Veta o inverznom zobrazení)**.**

Nech $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je C^k zobrazenie, ktorého Jakobián je invertovateľný v bode p ($\mathbf{f}$ je regulárne), potom existuje okolie U obsahujúce bod p tak, že $\mathbf{f} : U \to \mathbf{f}(U)$ je difeomorfizmus triedy C^k, t.j. existuje C^k inverzia $\mathbf{f}^{-1} : f(U) \to U$.

Príklad 2.0.19.

Majme zobrazenie z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované ako

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}.$$

Potom Jakobiho matica je

$$J_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

a determinant

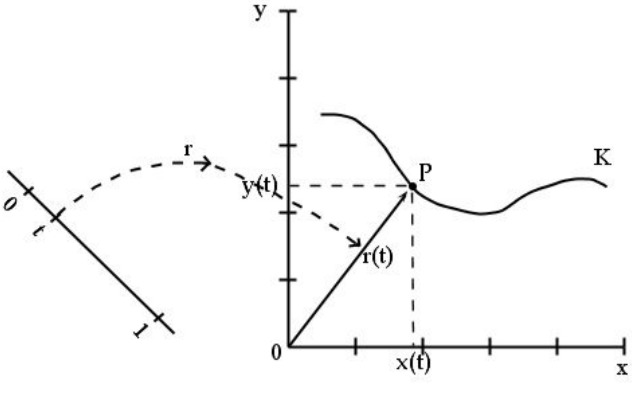
$$\det(J_{\mathbf{F}}) = e^{2x} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Z vety 2.0.18, pre každý bod p v $\mathbb{R}^2$, existuje jeho okolie, kde $\mathbf{F}$ je invertovateľné. Všimnime si, že to nám nehovorí, že zobrazenie je invertovateľné globálne. Skutočne, keďže $\mathbf{F}$ nie je prosté (prečo?), nemôže byť globálne invertovateľné.

2.1. Krivky

Predstavme si, že množina C v rovine alebo priestore je dráhou pohybujúceho sa bodu. Predpokladajme, že sa pohyb uskutočnil v konečnom časovom intervale $[a, b]$ a dráha je popísaná pomocou spojitého zobrazenia $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. To každému časovému okamžiku $t \in [a, b]$ priradí bod $\phi(t)$ v rovine alebo priestore udávajúci polohu bodu v čase t. Trajektória tohto pohybu potom definuje krivku $C = \phi([a, b])$.

Aby sme vylúčili patologické prípady (napr. Peanova krivka, ktorej parametrizácia vyplní celý štvorec), budeme požadovať hladkosť zobrazenia. Príslušná množina bodov je ale obrazom (oborom hodnôt) mnohých parametrických zobrazení. Zavedieme si preto pojem zmeny parametrizácie krivky a budeme študovať vlastnosti, ktoré sú na voľbe parametrizácie nezávislé.



(a)

Obr. 2.5: Cesta K daná zobrazením $\mathbf{r}$

Definícia 2.1.1.

Nech I je interval a $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ sú jeho ľavý, resp. pravý krajný bod. Cesta v R^n je spojité zobrazenie $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$ je začiatok resp. koniec cesty. Ak $a = b$, cestu voláme uzavretá.

Definícia 2.1.2.

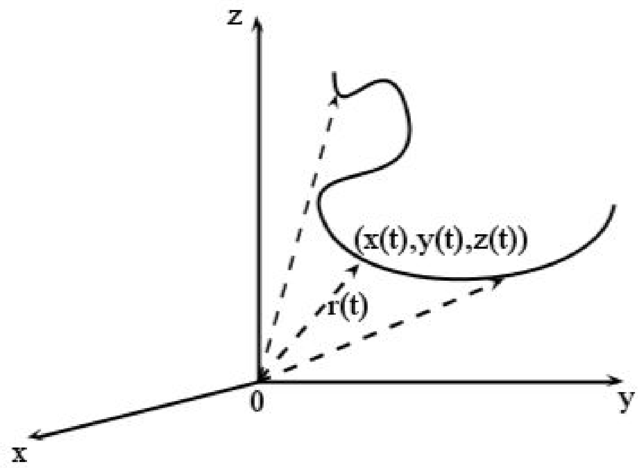
Cestu nazývame jednoduchou (Jordanovou), akk je prostá.

Predpokladajme, že krivku vieme parametrizovať dvoma rôznymi zobrazeniami γ_1, γ_2, ktoré sú spojité a bijektívne, potom sa dá ukázať, že medzi nimi existuje "dobré" (bijekcia) zobrazenie τ také, že $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$. Tak nám nasledujúca definícia dáva možnosť reparametrizácie kriviek. Všimnime si, že pri definičnom obore parametrizácie sa možno obmedziť napr. na interval $(0, 1)$.

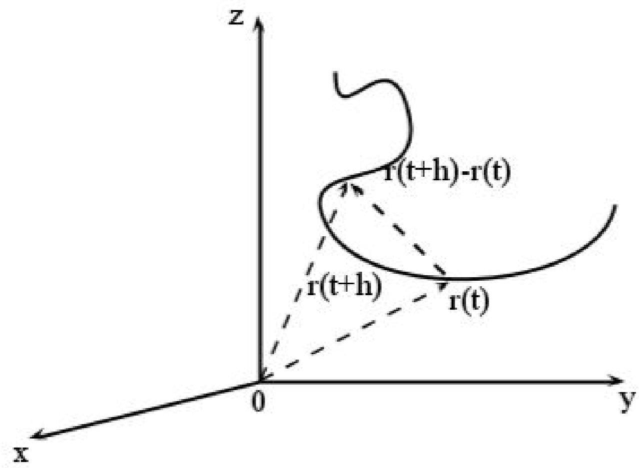
Definícia 2.1.3.

Cesty $\boldsymbol{\gamma_1} : I_1 \to \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\gamma_2} : I_2 \to \mathbb{R}^n$ sú ekvivalentné, akk existuje difeomorfizmus $\tau : I_1 \to I_2$ taká, že $\boldsymbol{\gamma_2}(\tau(t)) = \boldsymbol{\gamma_1}(t)$, pre každé $t \in I_1$. Triedou ekvivalencie takýchto ciest nazývame krivka. $\gamma_2 \circ \tau$ nazývame reparametrizáciou cesty (krivky) γ_1.

Reparametrizácie teda určujú reláciu ekvivalencie na množine všetkých parametrických kriviek. Krivkou vlastne nazývame triedu ekvivalencie parametrizovaných kriviek voči tejto relácii.



(a) Vektorová reprezentácia krivky



(b) Diferencia v čase

Obr. 2.6:

Problém 2.1.4.

Majme dve parametrizácie jednotkovej kružnice $\gamma_1 = (\cos t, \sin t)$, $\gamma_2 = (\sin t, \cos t)$. Nájdite difeomorfizmus τ medzi nimi.

Otázkou je, či môžem pokaziť regulárnosť krivky reparametrizáciou. Odpoveď nám dáva nasledujúca veta.

Veta 2.1.5.

Ľubovoľná reparametrizácia regulárnej krivky je regulárna krivka.